Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = 5 - 2n$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3. Que vaut u_{100} ? Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{100}$.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = (n+1)^2 - n^2$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Si oui, préciser sa raison.
3. Que vaut u_{99} ? Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 195 + 197 + 199$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$ et $u_0 = 0$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
3. Que vaut u_{100} ?

Exercice 4

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?

Exercice 5

Calculer la somme suivante : $S = 1 + 2 + 3 + ... + 998 + 999$

Exercice 6

La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.

1. Calculer la raison r et u_0.
2. Calculer la somme $S = u_{50} + u_{51} + ... + u_{100}$.

Exercice 7

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 2004 + 2005 \quad \text{et} \quad S_2 = 2006 + 2007 + 2008 + ... + 9998 + 9999$$

Exercice 8

Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?

$$A = 2005\,(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2004 + 2005 + 2006)$$

$$B = 2006\,(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2003 + 2004 + 2005)$$

Exercice 9

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20}$.

Exercice 10

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail.

1$^{\text{er}}$ contrat :

un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.

2$^{\text{ème}}$ contrat :

un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois (c'est-à-dire du 36$^{\text{ème}}$ mois).
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs)

(Remarque de vocabulaire : un bail est un contrat de location)

Exercice 11

Déterminer un nombre x tel que les trois nombres :

$$25 \qquad x \qquad 16$$

soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison négative.

Exercice 12

Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1. À quelle page en est Jean ?
2. Combien de pages comporte ce livre ?

(On supposera que le livre commence à la page N°1)

Exercice 13

Calculer la valeur exacte de la somme :

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + ... + 4096$$

Exercice 14

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + ... + 59049 \quad \text{et} \quad S_2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 999$$

(Dans les deux cas, on précisera s'il s'agit d'une somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique, ainsi que la raison correspondante)

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par la relation : $u_n = 3n - 2$

1. Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique de raison r que l'on précisera. Préciser son sens de variation.
2. Représenter graphiquement la suite (u_n). (On se limitera aux cinq ou six premiers termes)

Exercice 16

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

Exercice 17

Pour l'achat d'un terrain et la construction d'une maison, un couple souscrit un emprunt. Les futurs propriétaires sont informés que le capital emprunté et les intérêts dus, lorsqu'ils seront remboursés, représenteront la somme de 80000 €. La première mensualité est fixée à 300 € et le contrat stipule que les mensualités augmenteront de 20 € chaque année.

1. On note s_n le montant annuel remboursé au cours de la n-ième année suivant le début du prêt et on note n_0 la dernière année de remboursement. On admet que $n_0 > 10$.
   a) Calculer s_1, s_2, s_3 et s_4.
   b) Expliquer pourquoi la suite (s_n) se comporte comme une suite arithmétique pour $n < n_0$.
   c) Exprimer s_n en fonction de n (pour $n < n_0$).
   d) Calculer s_{10}.
2. On s'intéresse maintenant à la somme S_n cumulée des montants annuels remboursés au cours des n premières années : $S_n = s_1 + s_2 + ... + s_n$.
   a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
   b) Exprimer S_n en fonction de n (pour $n < n_0$)
   c) Au cours de quelle année le couple de propriétaires finira ses remboursement ?

Exercice 18

Calculer la valeur exacte de $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{38}}$ et de $B = 3 + 6 + 9 + 12 + ... + 99$.

Exercice 19

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes et préciser leur limite éventuelle :

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.
2. $u_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$
3. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 20

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer, par récurrence, que : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{3\sin n + 2\cos n + 5n}{n}$$

Exercice 22

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Résoudre l'équation du second degré suivante : $x^2 = 6x - 5$.
3. Déterminer deux réels A et B tels que : $u_n = A \times 5^n + B$.
4. En déduire u_{10}.

Exercice 23

On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n \text{ pour tout } n \geqslant 0.$$

1. Calculer u_2 ; u_3 et u_4.
2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$. Calculer une valeur approchée de u_{64}.
3. **La légende du jeu d'échec** : *le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit :"Place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième, quatre grains sur la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la 64ème case". Le roi sourit de la modestie de cette demande.*

   Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

Exercice 24

"Le premier jour du mois, je gagnai 2 centimes ; le deuxième jour du mois, je gagnai 4 centimes ; le troisième jour du mois, je gagnai 8 centimes ; etc... ; en doublant d'un jour à l'autre.

À la fin du mois, j'avais gagné environ un milliard de centimes ! C'était vers la fin des années soixante..."

En quelle année était–ce ?

Exercice 25

En Musique le "LA" du diapason est un son dont la fréquence est 440 Hz. On appelle octave l'intervalle entre deux notes dont le rapport des fréquences est 2. Par exemple, la note dont la fréquence est 880 Hz est aussi un "LA" car sa fréquence est le double de celle du "LA" du diapason.

L'octave est divisée en douze parties appelées des "demi-tons". Les notes obtenues en superposant des demi-tons sont appelées les notes de la gamme chromatique :

LA – SIb – SI – DO – DO# – RE – MIb – MI – FA – FA# – SOL – SOL# – LA

On admettra que les fréquences successives des notes de la gamme chromatique sont les termes d'une suite géométrique (dont on veut déterminer la raison) ; c'est-à-dire que connaissant la fréquence du "LA" du diapason (440 Hz), on obtient la fréquence du SIb en la multipliant par un nombre q, puis celle du SI en multipliant la fréquence du SIb par le **même** nombre q, etc...

1. Exprimer la fréquence de chaque note de la gamme chromatique (de SIb à SOL#) en fonction de q.
2. Exprimer la fréquence du "LA" de l'octave supérieure au "LA" du diapason en fonction de q.
3. Sachant que la fréquence du "LA" de l'octave supérieure au "LA" du diapason est 880 Hz, calculer q.

Exercice 26

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbone 14 décroît après la mort du tissu de 1,24% en 100 ans.

1) Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, 2000 ans et 10000 ans.
2) Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.
3) Un fossile ne contient plus que 10 % de ce qu'il devait contenir en carbone 14. Donner une estimation de son âge.

Exercice 27

Les V.H.F. (voleurs fortement hiérarchisés) avaient tous, dans leur bande, un grade différent. Comme ils avaient, une nuit, volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara :

"Le moins gradé en prendra un. Celui du grade immédiatement supérieur, deux. Celui du troisième grade, trois. Et ainsi de suite."

Mais les voleurs se révoltèrent contre cette injustice :

"Nous en prendrons cinq chacun, dit le plus audacieux." Et ainsi fut fait.

Combien d'appareils les V.H.F avaient-ils volés ?

Exercice 28

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n - n$.

Calculer u_0, u_1, u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

Exercice 29

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 €.

Pour ne pas se dévaluer, il est prévu que chaque année la prime augmente de 2% par rapport à l'année précédente.

On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2ème année et la 3ème année)
2. Préciser la nature de la suite (u_n) ainsi que sa raison q.

   Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
3. Calculer la prime qu'il touchera la 20ème année (c'est-à-dire u_{20})
4. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années (c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{20}$)

Exercice 30

On dispose d'un capital C_0 de 1500 €.

Le 1er janvier 2000, on place ce capital sur un compte à intérêts composés de 3% par an.

1. Calculer le capital C_1 obtenu au bout d'un an.
2. Calculer le capital C_7 obtenu au bout de 7 ans.

   De quel pourcentage a augmenté le capital pendant ces 7 années ?
3. Combien d'années faut-il laisser cet argent sur le compte afin d'avoir un capital d'au moins 2000 € ?

Exercice 31

On considère la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 1048576$.

1. Trouver, à l'aide de la calculatrice, l'entier n tel que $2^n = 1048576$.
2. Combien y a-t-il de termes dans la somme S ?
3. Calculer la somme S.

(Si vous n'avez pas su faire les questions 1 et 2 de cet exercice, vous pouvez quand même faire la question 3)

Exercice 32

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'un ni l'autre ?
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < u_n \leqslant 3$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   b) Exprimer v_n en fonction de n.

   c) Exprimer u_n en fonction de v_n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 33

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 5n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

Exercice 34

1. ABC est un triangle rectangle. Son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer ces longueurs.
2. ABC est un triangle rectangle. Son plus petit côté est 1 et les longueurs de ses côtés sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer ces longueurs.

Exercice 35

Calculer les sommes suivantes :

$I_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ (somme des n premiers entiers naturels impairs)

$P_n = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$ (somme des n premiers entiers naturels pairs)

Exercice 36

Calculer la somme suivante :

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + ... + 2005^2 - 2006^2$$

(Indication : regrouper les termes par deux)

Exercice 37

Résoudre l'équation : $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^8} = 0$$

(Indication : calculer la somme puis remarquer que si x est solution alors $x < 0$)

Exercice 38

Calculer la somme des aires hachurées :

(Il y a une infinité de triangles)